

Wektor danych x jest **symetryczny** wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{x(k) + x(n+1-k)}{2} = \tilde{x} \quad \forall k \leq \frac{n+1}{2}$$

Tu \tilde{x} jest medianą danych x (wyznaczoną ze wzoru $\tilde{x} = q(0.5, x)$)

Wektor danych x jest **dodatnio (prawostronnie) asymetryczny** wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{x(k) + x(n+1-k)}{2} \geq \frac{x(k+1) + x(n-k)}{2} \quad \forall k \leq \frac{n-1}{2}$$

oraz gdy przynajmniej jedna z takich nierówności jest ostra.

Wektor danych x jest **ujemnie (lewostronnie) asymetryczny** wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{x(k) + x(n+1-k)}{2} \leq \frac{x(k+1) + x(n-k)}{2} \quad \forall k \leq \frac{n-1}{2}$$

oraz gdy przynajmniej jedna z takich nierówności jest ostra.

Wykres symetrii danych $x^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ jest zbiorem par

$$\left(\frac{q(1-\alpha, x) - q(\alpha, x)}{2}, \frac{q(1-\alpha, x) + q(\alpha, x)}{2} \right), \quad \frac{1}{2n} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$$

Współczynnik symetrii danych $x^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ jest funkcją

$$\gamma(\alpha) = \frac{q(1-\alpha, x) + q(\alpha, x) - 2q(0.5, x)}{q(1-\alpha, x) - q(\alpha, x)}$$

1. Niech x_∞ , \bar{x} , \tilde{x} będą odpowiednio średnią Czebyszewa, średnią arytmetyczną, medianą.

a) Dla danych symetrycznych $x_\infty = \bar{x} = \tilde{x}$.

b) Dla danych dodatnio asymetrycznych $x_\infty > \bar{x} > \tilde{x}$.

2. Niech h będzie funkcją wypukłą, x wektorem symetrycznym. Pokaż, że $h(x)$ jest wektorem prawostronnie asymetrycznym.

3. Pokaż, że wykres symetrii jest wykresem funkcji (**funkcji symetrii**).

4. Funkcja symetrii ma wykres jest łamaną o węzłach w punktach $\left(\frac{q(1-\alpha, x) - q(\alpha, x)}{2}, \frac{q(1-\alpha, x) + q(\alpha, x)}{2} \right)$ dla $\alpha = \frac{2i-1}{2n}$ gdzie $i = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}$

5. Narysuj funkcję symetrii dla danych: $x^T = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$, x^2 , $1 - \frac{1}{x}$.¹

6. Zbadaj symetrię danych, rysując wykres symetrii i współczynnik symetrii (p. zad 7 i 8)

(a) Cavendisha (Lista 1, zad.1)

(b) Odległość planet od Słońca (Ziemia=10)

MERKURY	WENUS	ZIEMIA	MARS	JOWISZ
4	7	10	15	29

¹ Dla wektora $x^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ i funkcji h , $h(x)^T = [h(x_1), h(x_2), \dots, h(x_n)]$

SATURN	URAN	NEPTUN	PLUTON
52	95	192	395

(c) Dla danych o emisji dwutlenku węgla pochodzącej z przemysłu i komunikacji (w tonach na głowę rocznie) w państwach o co najmniej 20 mln mieszkańców

Congo	Ethiopia	Nepal	Tanzania	Bangladesh	Ghana	Myanmar	Sudan
0.0	0.0	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.2
Kenya	Nigeria	Vietnam	Pakistan	Peru	India	Philippines	Morocco
0.3	0.3	0.5	0.7	0.8	0.9	0.9	1.0
Indonesia	Columbia	Egypt	Brazil	Algeria	China	Thailand	Turkey
1.2	1.4	1.7	1.8	2.3	2.5	2.5	2.8
United States	Australia	Canada	Saudi Arabia	Russia	Germany		
19.9	17.0	16.0	11.0	10.2	10.0		
Korea, North	Japan	United Kingdom	Korea, South	South Africa			
9.7	9.1	9.0	8.8	8.1			
Poland	Ukraine	Italy	Spain	France	Venezuela	Uzbekistan	
8.0	7.6	7.3	6.8	6.1	5.1	4.8	
Malaysia	Argentina	Romania	Iran	Mexico	Iraq		
4.6	3.9	3.9	3.8	3.7	3.6		

Udowodnij, że

7. Dane są symetryczne wtedy i tylko wtedy gdy ich funkcja symetrii jest stała. Jaka jest wartość tej stałej?

8. Dane są dodatnio (prawostronnie) asymetryczne wtedy i tylko wtedy gdy ich funkcja symetrii jest niemalejąca.

9. Współczynnik symetrii spełnia nierówność $|\gamma(\alpha)| \leq 1$.

10. Wykres dowolnej funkcji symetrii leży w pewnym kącie prostym. Podaj współrzędne wierzchołka tego kąta i nachylenie jego ramion względem osi układu współrzędnych.

11. Dane dodatnio asymetryczne mają nieujemny współczynnik symetrii. Czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne? Jaki jest współczynnik symetrii danych symetrycznych?

12. Jaka jest postać funkcji symetrii dla danych o stałym współczynniku symetrii?

13. Zsymetryzuj wektory danych, używając bądź metody prób i błędów, bądź metody siecznych, omówionej na ćwiczeniach²

(a) Odległość planet od Słońca

(b) Dane o emisji dwutlenku węgla

² patrz też plik Box-Cox.pdf na mojej stronie